ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 38, No. 3, 1981

POINTS DE NAMIOKA ESPACES NORMANTS APPLICATIONS À LA THÉORIE ISOMÉTRIQUE DE LA DUALITÉ

PAR
GILLES GODEFROY

ABSTRACT

We study in this work various aspects of the isometric theory of duality. We show that in wide classes of Banach spaces, dual spaces are characterized by the existence of a retraction from E'' onto E. The predual of such spaces is then unique. We study the imbedding of regularly normed spaces into dual spaces. We better the known results on loss of regularity of the norm of dual spaces. We characterize the dual norms on an Asplund space in terms of "bad differentiability".

On étudie dans ce travail différents aspects de la théorie isométrique de la dualité, en rapport avec les propriétés particulières de certains espaces de Banach ou de certaines normes jouissant de propriétés de régularité. Les problèmes abordés sont les suivants: existence et unicité du prédual, propriétés des normes duales, plongement isométrique d'un espace dans un espace dual.

Précisons quelques notations: un espace de Banach X sera dit *espace dual* s'il existe un Banach E tel que E' soit isométrique à X. Un espace de Banach E sera dit *unique prédual* de son dual E' si tout Banach X tel que X' soit isométrique à E', est isométrique à E. La topologie faible d'un Banach E sera notée ω, la topologie préfaible d'un dual E' sera notée ω^*. La boule unité d'un Banach E sera notée E_1. Les duaux, biduaux, ... d'un Banach E seront supposés munis de normes duales, biduales, ... de la norme de E. Un espace de Banach E sera identifié, *sans notation particulière*, à un sous-espace des son bidual E'' par l'injection canonique. Le lecteur constatera que cet abus de notation n'introduit pas d'ambiguité gênante.

Reçu le 23 juillet 1980

I. Definitions. Lemmes preparatoires

DÉFINITION 1. Soit E un espace de Banach. Un sous-espace vectoriel fermé X de E' sera dit normant si on a: $\|x\| = \sup_{y \in X_1} |y(x)|$ pour tout $x \in X$. La famille des sous-espaces normants de E' sera notée $\mathcal{N}_E$.

Introduisons maintenant une notion moins classique qui se révèlera utile.

DÉFINITION 2. On appellera cône perpendiculaire à E, et on notera $\mathcal{C}_E$, le sous-cône de E'' défini par:

$$\mathcal{C}_E = \{x \in E'' \mid \|x - u\| \geqq \|u\| \ \forall u \in E\}.$$

Il est immédiat que $\mathcal{C}_E$ est un cône; ce cône peut être vu comme l'intersection, sur $x \in E$, des complémentaires dans E'' des boules ouvertes de centre x et de rayon $\|x\|$. On a clairement $E \cap \mathcal{C}_E = \{0\}$. Le terme "cône perpendiculaire" s'explique par le fait que $\mathcal{C}_E$ est constitué des éléments y de E'' tels que $x \perp y$ pour tout $x \in E$, où "$\perp$" signifie "orthogonal au sens de James" (voir [4], p. 24). Le lemme suivant relie les deux notions.

LEMME 3. *Soit X un sous-espace vectoriel fermé de E'. On a l'équivalence*:

$$X \in \mathcal{N}_E \Leftrightarrow X^{\perp} \subseteq \mathcal{C}_E.$$

DÉMONSTRATION. Soit X un sous-espace vectoriel fermé de E' tel que $X^{\perp} \subseteq \mathcal{C}_E$. Supposons que $X \notin \mathcal{N}_E$; il existe alors $f \in E$, de norme 1, telle que $\sup_{y \in X_1} |f(y)| = \alpha < 1$. Par Hahn–Banach, il existe alors $\tilde{f} \in E''$, de norme α, telle que $(\tilde{f} - f) \in X^{\perp}$. On a alors $\|\tilde{f}\| = \alpha = \|(\tilde{f} - f) + f\| \geqq \|f\| = 1$ puisque $(\tilde{f} - f) \in \mathcal{C}_E$; or ceci est absurde, donc $X^{\perp} \subseteq \mathcal{C}_E \Rightarrow X \in \mathcal{N}_E$.

Inversément, soit $X \in \mathcal{N}_E$, et $f \in X^{\perp}$. Il est clair que $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{N}_E$. On vérifie facilement que $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{N}_E$ équivaut à: $(\operatorname{Ker} f \cap E'_1)$ dense dans (E'_1, ω^*). Soit alors $u \in E$, de norme 1. Etant donné $\varepsilon > 0$, posons $\omega_\varepsilon = \{x \in E'_1 \mid u(x) > 1 - \varepsilon\}$. L'ensemble ω_ε est un ouvert de (E'_1, ω^*); il existe donc $x_\varepsilon \in \operatorname{Ker} f \cap \omega_\varepsilon$, et on a $u + f(x_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, d'où $\|u + f\| > 1 - \varepsilon$. On en déduit que $\|u + f\| \geqq \|u\| = 1$, et donc que $f \in \mathcal{C}_E$. C.Q.F.D.

LEMME — DÉFINITION 4. Soit E un espace de Banach. Considérons la propriété (P): il existe $\Gamma_E \in \mathcal{N}_E$ tel que $X \in \mathcal{N}_E \Leftrightarrow \Gamma_E \subseteq X$. Alors (P) est vérifiée si et seulement si $\mathcal{C}_E$ est un sous-espace vectoriel ω^*-fermé de E'', et on a alors $\mathcal{C}_E = \Gamma_E^{\perp}$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathcal{C}_E$ soit un sous-espace vectoriel ω^*-fermé de E''. Soit Γ_E l'orthogonal de $\mathscr{C}_E$ dans E'. On a $\Gamma_E \in \mathscr{N}_E$ d'après le lemme 3. Soit alors $X \in \mathscr{N}_E$. On a $X^\perp \subseteq \mathscr{C}_E$ d'après le lemme 3, d'où $X \supseteq \Gamma_E$.

Inversément, supposons qu'il existe $\Gamma_E \in \mathscr{N}_E$ vérifiant l'énoncé du lemme. On a: $\Gamma_E^\perp \subseteq \mathscr{C}_E$ d'après le lemme 3. D'autre part, soit $f \in \mathscr{C}_E$. On a $\operatorname{Ker} f \in \mathscr{N}_E$, d'où $\operatorname{Ker} f \supseteq \Gamma_E$, d'où $f \in \Gamma_E^\perp$. Donc on a $\mathscr{C}_E = \Gamma_E^\perp$, ce qui montre que $\mathscr{C}_E$ est un espace vectoriel ω^*-fermé. C.Q.F.D.

LEMME — DÉFINITION 5. Soit E un espace de Banach, et $x \in E_1'$. Les énoncés suivants sont équivalents:

(1) x est un point de continuité de l'application:

$$\mathrm{Id}: (E_1', \omega^*) \to (E_1', \omega).$$

(2) L'ensemble $E_1''' \cap \{x + E^\perp\}$ est réduit à $\{x\}$.

Un point de E_1' vérifiant les conditions ci-dessus sera appelé point de Namioka de E_1'; l'ensemble de ces points sera noté $\mathrm{Nam}(E_1')$.

DÉMONSTRATION. Rappelons que $E^\perp$ désigne ici l'orthogonal de E dans E'''. Soit $\mathscr{F}$ le filtre des voisinages de x dans (E_1', ω^*). Soit $\bar{\mathscr{F}}$ l'ensemble des points adhérents à $\mathscr{F}$ dans (E_1''', ω^*). Montrons que $\bar{\mathscr{F}} = E_1''' \cap \{x + E^\perp\}$. Il est clair que tout $y \in \bar{\mathscr{F}}$ coïncide avec x sur E; on a donc $\bar{\mathscr{F}} \subseteq E_1''' \cap \{x + E^\perp\}$. Inversément, soit $y \in E_1''' \cap \{x + E^\perp\}$. Soit U un ultrafiltre, et $\{y_\alpha\} \subseteq E_1'$ tels que $\lim_U y_\alpha = y$ dans (E_1''', ω^*). Etant donné que $y \in (x + E^\perp)$, on a $\lim_U y_\alpha = x$ dans (E_1', ω^*). Mais ceci montre que $U > \mathscr{F}$, donc que $y \in \bar{\mathscr{F}}$.

Remarquons à présent que x est un point de continuité de $\mathrm{Id}: (E_1', \omega^*) \to (E_1', \omega)$ si et seulement si le filtre $\mathscr{F}$ converge dans (E_1''', ω^*), c'est à dire si et seulement si $\bar{\mathscr{F}}$ est réduit à un point, puisque (E_1''', ω^*) est compact; d'après ce qui précède, $\mathscr{F}$ converge donc si et seulement si $E_1''' \cap \{x + E^\perp\} = \{x\}$.

C.Q.F.D.

Remarquons que si E n'est pas réflexif, l'orthogonal $E^\perp$ de E dans E''' n'est pas réduit à $\{0\}$, donc que $E_1''' \cap \{x + E^\perp\} = \{x\}$ n'est possible que si x est de norme 1. Ce dernier lemme permet d'estimer la "grosseur" du cône $\mathscr{C}_E$ à l'aide d'une propriété d'intersection plus intuitive.

LEMME — DÉFINITION 6. Soit E un espace de Banach. On notera ($\square$) la propriété suivante: toute famille $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ de boules de E'', dont les centres appartiennent à E, et d'intersection non vide dans E'', est d'intersection non vide dans E. On a l'équivalence: (1) E possède la propriété d'intersection ($\square$); (2) $E'' = E + \mathscr{C}_E$.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in E''$. Considérons la famille $(B_u)_{u \in E}$ des boules de centre $u \in E$ et de rayon $\|x - u\|$. On a évidemment $x \in \bigcap_{u\in E} B_u$. Puisque E possède la propriété ($\square$), il existe $t \in E \cap \bigcap_{u\in E} B_u$. On a donc:

$$\forall u \in E \qquad \|t - u\| \leqq \|x - u\|.$$

Et puisque $t \in E$:

$$\forall u' \in E \qquad \|(x - t) - u'\| = \|x - (t + u')\| \geqq \|t - (t + u')\| = \|u'\|$$

ce qui montre que $(x - t) \in \mathscr{C}_E$ et donc que $E'' = E + \mathscr{C}_E$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de boules d'intersection non vide, dont les centres sont dans E. Soit $x \in \bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha$, et soit $x' \in E$ tel que $(x - x') \in \mathscr{C}_E$, on a clairement $\|t - x'\| \leqq \|t - x\|$ pour tout $t \in E$, et donc $x' \in \bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha \cap E$.

C.Q.F.D.

Remarquons que s'il existe une projection de norme 1 de E'' sur E, ou plus généralement s'il existe une projection 1-lipchitzienne — non nécessairement linéaire — de E'' sur E, alors E possède la propriété d'intersection ($\square$). C'est en particulier le cas de tout sous-espace 1-complémenté d'un espace dual. Dans la suite, on appellera rétraction d'un espace Y sur un sous-espace X toute projection 1-lipchitzienne, non nécessairement linéaire, de Y sur X.

II. Existence et unicité du prédual

Enonçons le résultat principal sous sa forme générale.

THÉORÈME 7. *Soit E un espace de Banach possédant la propriété* (P). *Soit Γ_E l'unique élément minimal de $\mathscr{N}_E$. Les énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *E est un espace dual.*

(2) *E possède la propriété d'intersection* ($\square$).

(3) *La boule unité E_1 de E est compacte pour la topologie σ_Γ de la convergence simple sur Γ_E.*

Si les propriétés ci-dessus sont vérifiées, il existe une unique rétraction de E'' sur E, qui est la projection parallèlement à $\mathscr{C}_E$, et Γ_E est l'unique prédual de E.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2) est clair puisque tout espace dual est 1-complémenté dans son bidual, par la projection parallèlement à $E^\perp$.

(2) $\Rightarrow$ (1) D'après le lemme 6, on a $E'' = E + \mathscr{C}_E$. Il est clair que $E \cap \mathscr{C}_E = \{0\}$. L'espace E étant supposé avoir la propriété (P), le cône $\mathscr{C}_E$ est un espace vectoriel, et on a donc $E'' = E \oplus \mathscr{C}_E$. Notons R_Γ la surjection continue de E'' sur Γ'_E definie par la restriction au sous-espace Γ_E de E'; soit φ la restriction de R_Γ à E. L'espace Γ_E appartenant à $\mathscr{N}_E$, l'application φ est une injection isométrique dans Γ'_E.

Montrons que φ est surjective. Soit $f \in \Gamma'_E$, de norme 1, et soit $\tilde{f} \in E''_1$ tel que $R_\Gamma(\tilde{f}) = f$. Soit $f_1 \in E$ tel que $(\tilde{f} - f_1) \in \mathscr{C}_E$. On a clairement $\varphi(f_1) = f$, puisque $\mathscr{C}_E = \Gamma_E^\perp$ (lemme 4).

(1) $\Rightarrow$ (3) Soit X un prédual de E; on a $X \in \mathcal{N}_E$ donc $\Gamma_E \subseteq X$. La topologie σ_Γ est séparée et moins fine que la toplogie ω^* de la convergence ponctuelle sur X. Or E_1 muni de cette topologie ω^* est compact, et par conséquent les topologies ω^* et σ_Γ coïncident sur E_1. Donc (E_1, σ_Γ) est compacte.

(3) $\Rightarrow$ (1) Reprenons les notations de la démonstration de (2) $\Rightarrow$ (1). La surjection R_Γ est continue de (E''_1, ω^*) dans (Γ'_1, ω^*); or E_1 est dense dans (E''_1, ω^*), donc $\varphi(E_1)$ est dense dans (Γ'_1, ω^*). Mais φ est continue de (E_1, σ_Γ) dans (Γ'_1, ω^*) et E_1 est compacte pour σ_Γ; on a donc $\varphi(E_1) = \Gamma'_1$.

Enfin si $r : E'' \to E$ est une rétraction, on a pour tout $x \in E''$, $(x - r(x)) \in \mathscr{C}_E$, ce qui montre que r s'identifie à la projection parallèlement à $\mathscr{C}_E$. L'unicité du prédual de E se déduit immédiatement de l'unicité de la rétraction. On peut également remarquer que, sans hypothèse particulière sur E, tout prédual de E est un élément minimal de $\mathcal{N}_E$; si E a la propriété (P), tout prédual s'identifie donc à Γ_E. C.Q.F.D.

Remarque. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) donne, pour une certaine catégorie d'espaces que nous allons étudier, des conditions à priori plus faibles — comme l'existence d'une projection de norme 1 de E'' sur E — qui permettent d'affirmer que E est un dual. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) donne un critère utilisable permettant de vérifier que certains espaces sont des duaux.

Application du théorème 7

Nous allons utiliser le lemme 4 pour montrer que la propriété (P) est valide pour des classes étendues d'espaces de Banach.

(A) Tout espace séparable ne contenant pas d'espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ possède la propriété (P).

Soit f et g deux éléments de $\mathscr{C}_E$. D'après la caractérisation de Rosenthal, des espaces de Banach séparables qui ne contiennent pas $l^1(\mathbf{N})$ (voir [7]), les fonctions f et g sont de 1ère classe de Baire sur (E'_1, ω^*). Les ensembles $\operatorname{Ker} f \cap E_1$ et $\operatorname{Ker} g \cap E_1$ sont donc des $\mathscr{G}_\delta$ de (E'_1, ω^*), denses puisque f et g appartiennent à $\mathscr{C}_E$. Si λ et μ sont des réels, on a $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$. L'intersection de deux $\mathscr{G}_\delta$-denses d'un compact étant dense, on a $(\lambda f + \mu g) \in \mathscr{C}_E$ (cf. lemme 3).

D'après le théorème de Banach–Dieudonné, il suffit, pour démontrer que $\mathscr{C}_E$ est ω^*-fermé, de montrer que $\mathscr{C}_E \cap E''_1$ est ω^*-fermé. Or, l'ensemble $\mathscr{C}_E \cap E''_1$

est un compact de fonctions de 1ère classe sur le compact métrisable (E'_1, ω^*). Dans ce cadre, les notions de "fermé" et de "séquentiellement fermé" coïncident (voir [2]). Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathscr{C}_E \cap E''_1$, convergente vers f dans (E''_1, ω^*). On a $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker} f_n \subseteq \operatorname{Ker} f$. Or l'intersection d'une famille dénombrable de $\mathscr{G}_\delta$-denses d'un compact est dense, donc $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker} f_n$ est dense, donc $f \in \mathscr{C}_E$.

REMARQUE. Bien que la propriété (P) soit de nature isométrique, elle sera vérifiée, dans ce cas, pour toute norme sur E équivalente à la norme initiale.

(B) Tout espace de Banach tel que E'_1 soit l'enveloppe convexe ω^*-fermée de $\operatorname{Nam}(E'_1)$ possède la propriété (P).

En effet si $f \in \mathscr{C}_E$ alors $\operatorname{Ker} f \cap E'_1$ est dense dans (E'_1, ω^*) et fermé dans (E'_1, ω) et par conséquent $\operatorname{Nam}(E'_1) \subseteq \operatorname{Ker} f$. Inversément, si $g \in E''$ est tel que $\operatorname{Nam}(E'_1) \subseteq \operatorname{Ker} g$, alors $\operatorname{Ker} g \cap E'_1$ contient l'enveloppe convexe fortement fermée de $\operatorname{Nam}(E'_1)$, qui est dense dans (E'_1, ω^*). En résumé, on a donc $f \in \mathscr{C}_E \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Nam}(E'_1)$. Il est alors immédiat que $\mathscr{C}_E$ est un sous-espace vectoriel ω^*-fermé de E''

Sous ces hypothèses, l'espace normant minimal Γ_E s'identifie à l'espace vectoriel fermé engendré par $\operatorname{Nam}(E'_1)$. De plus, E est un dual si et seulement si E_1 est compacte pour la topologie de la convergence simple sur $\operatorname{Nam}(E'_1)$— d'après le théorème 7, et puisque cette dernière topologie s'identifie à la topologie σ_Γ.

EXEMPLE. Si la norme de E'' est lisse en tout point d'un ensemble dense de E, alors on a $\overline{\mathrm{CV}}^{\omega^*}(\operatorname{Nam}(E'_1)) = E'_1$. Rappelons que la norme d'un Banach X est dite lisse en $x \in X$ de norme 1 s'il existe un unique élément $f_x \in X'$, de norme 1, tel que $f_x(x) = 1$. Tout point de Fréchet-différentiabilité est un point de lissité. Le lemme 5 permet alors de voir que si $x \in E$, de norme 1, est un point de lissité de la norme de E'', et si f_x désigne l'unique élément de E'_1 tel que $f_x(x) = 1$, alors d'après la lissité on a $E'''_1 \cap \{f_x + E^\perp\} = \{f_x\}$ et donc $f_x \in \operatorname{Nam}(E'_1)$. La densité de cet ensemble de points permet alors de conclure. En particulier, si la norme de E est Fréchet-différentiable en tout point d'un ensemble dense de E, alors E a la propriété (P). En effet la caractérisation de Smulyan ([8]) de ces points permet de montrer que si la norme de E est Fréchet-différentiable en x, la norme de E'' l'est également.

Cette dernière propriété sera vérifiée pour toute norme si E' a la propriété de Radon–Nikodym ([6]).

REMARQUES. Si on suppose simplement que $\operatorname{Nam}(E'_1)$ sépare les points de E, le théorème 7 peut encore s'appliquer. Bien que des exemples de tels espaces puissent être construits, ceux-ci n'apparaissent pas naturellement dans la pratique.

Enonçons la caractérisation des duaux dans le cas particulier où on a Fréchet-différentiabilité de la norme sur un ensemble dense: E est un dual si et seulement si E_1 est compacte pour la topologie de la convergence simple sur les formes linéaires tangentes aux points de Fréchet-différentiabilité de la norme.

(C) *Espaces duaux possédant la propriété* (P). Pour ces derniers, les conditions d'existence du prédual E sont sans objet; le théorème 7 fournit l'unicité de la rétraction de E''' sur E' et l'unicité du prédual de E'.

(1) Si E' ne contient pas $l^1(\mathbf{N})$, alors E' a la propriété (P), avec une démonstration analogue à (A). On en déduit: Soit E un Banach sous-espace d'un WCG — ou plus généralement un Banach faiblement K-analytique (voir [9]). Si l'espace $c_0(\mathbf{N})$ n'est pas quotient de E, alors il existe une unique rétraction de E''' sur E', et E est l'unique prédual de E'.

En effet (voir [5], p. 104), sous ces hypothèses, E' ne contient pas $l^1(\mathbf{N})$ si et seulement si $c_0(\mathbf{N})$ n'est pas quotient de E.

(2) Si E a la propriété de Radon–Nikodym, alors E' a la propriété (P) — car $\overline{\mathrm{CV}}^{\omega^*}\mathrm{Nam}(E''_1) = E''_1$.

(3) Si E a une norme localement uniformément convexe, alors E' a la propriété (P).

III. Plongement d'un espace dans un espace dual

Tout espace de Banach X se plonge de façon canonique dans un espace dual, à savoir X''. Nous allons étudier une classe naturelle d'espaces E pour lesquels tout plongement dans un espace dual X' se ramène, en un certain sens, au plongement canonique dans le bidual E''.

THÉORÈME 8. *Soit E un espace de Banach tel que E'_1 soit l'enveloppe convexe fermée en norme de* $\mathrm{Nam}(E'_1)$. *On suppose que E est isométrique à un sous-espace du dual X' d'un Banach X. Il existe alors une surjection φ de X sur E' dont la transposée φ' est une injection isométrique de E'' dans X' qui prolonge l'injection canonique de E dans X'.*

DÉMONSTRATION. Soit φ la restriction à X de la surjection canonique de X'' sur E'. Le convexe $\varphi(X_1)$ est ω^*-dense dans E'_1; son adhérence forte $\overline{\varphi(X_1)}$ contient donc $\mathrm{Nam}(E'_1)$; d'après l'hypothèse faite sur E', on a $\overline{\varphi(X_1)} = E'_1$; il est facile de voir qu'on a en fait $\varphi(X_1) = E'_1$, par exemple en exprimant tout élement de E_1' comme image par φ d'une série normalement convergente dans X_1. Il est clair que la transposée φ' de φ est une injection isométrique de E'' dans X', et qu'elle promonge l'injection canonique de E dans X'. C.Q.F.D.

Le résultat ci-dessus s'applique en particulier aux espaces de Banach E dont la norme est partout Fréchet-différentiable (d'après [8] et le théorème de Bishop–Phelps ([4], p. 3)), ou à l'espace $c_0(\mathbf{N})$ muni de sa norme usuelle. Notons que $\varphi(E'')$ est un sous-espace ω^*-fermé de X' isométrique à E''. Notons égalementque si E vérifie les hypothèses de théorème 8, E n'est contenu dans aucun sous-espace retract de E'' distinct de E''.

Notons un corollaire immédiat du théorème 8.

Corollaire 9. *Soit E un Banach tel que E_1' soit l'enveloppe convexe fermée en norme de* $\mathrm{Nam}(E_1')$. *Soit* (A) *une propriété héréditaire. L'espace E est contenu isométriquement dans un dual possédant la propriété* (A) *si et seulement si E'' a la propriété* (A).

IV. Propriétés des normes duales

Dans ce paragraphe, on notera si nécessaire le dual d'ordre j de $E = E^{(0)}$ par $E^{(j)}$. On notera par ailleurs

Q_1 la propriété "avoir une norme Fréchet-différentiable,"

Q_2 la propriété "être faiblement localement uniformément convexe",

Q_3 la propriété "avoir une norme lisse,"

Q_4 la propriété "être strictement convexe."

On sait (voir [4], pp. 33–35) que si l'un des espaces $E^{(j)}$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ a la propriété Q_j, l'espace E est réflexif. Nous allons étendre et améliorer ce résultat.

Proposition 10. *Soit E un Banach. Si l'un des espaces $E^{(j)}$* $(0 \leqq j \leqq 3)$ *possède la propriété* Q_{j+1}, *on a* $\mathcal{N}_E = \{E'\}$.

Démonstration. Le lemme 5 montre que si E''' a la propriété Q_4 ou si E' a la propriété Q_2, alors $\mathrm{Nam}(E_1')$ contient la sphère unité de E'. Or tout élément de $\mathcal{N}_E$ contient $\mathrm{Nam}(E_1')$, et donc $\mathcal{N}_E = \{E'\}$. Si E'' a Q_3 ou si E a Q_1, alors tout élément de la sphère unité de E' qui atteint son maximum sur E_1 appartient à Nam (E_1'). Cet ensemble est dense en norme d'après le théorème de Bishop–Phelps ([4], p. 3), ce qui termine la démonstration. C.Q.F.D.

On en déduit le

Théorème 11. *Soit E un Banach possédant la propriété* ($\square$). *Si l'un des espaces $E^{(j)}$* $(0 \leqq j \leqq 3)$ *possède la propriété* Q_{j+1}, *alors E est réflexif.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 6, si E possède ($\square$), on a $E'' = E + \mathscr{C}_E$. D'après la proposition 10, si l'un des espaces $E^{(j)}$ $(0 \leqq j \leqq 3)$ a Q_{j+1}, on a $\mathscr{C}_E = \{0\}$ par le lemme 3, d'où $E'' = E$. C.Q.F.D.

Le théorème 11 étend donc les résultats connus pour les duaux aux espaces ayant la propriété ($\square$), donc en particulier aux sous-espaces rétracts des duaux.

D'après le corollaire 11, si E non réflexif a la propriété ($\square$), la sphère unité de E''' contient un segment. On peut étendre ce dernier résultat comme suit:

PROPOSITION 12. *Soit E un Banach possédant la propriété* ($\square$), *non réflexif. Soit S_j le simplexe de dimension j. La sphère unité de l'espace $E^{(2j-1)}$ contient S_j.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'hypothèse de récurrence (P_n).

(P_n): Il existe un simplexe S_n, de dimension n, contenu dans la sphère unité de $E^{(2n-1)}$, non contenu dans la sphère unité de $E^{(2n-3)}$.

Montrons (P_1). L'espace E non réflexif possédant ($\square$), on a $\mathcal{N}_E \neq \{E'\}$, et donc il existe $x \in E'$, de norme 1, tel que $x \notin \mathrm{Nam}(E'_1)$. D'après le lemme 5 on a alors $(x + E^{\perp}) \cap E'''_1 \neq \{x\}$. Soit donc $y \neq x$, et $y \in \{(x + E^{\perp}) \cap E'''_1\}$. Le segment $[x, y]$ répond à la question.

Supposons maintenant (P_n). Soit $y \in S_n \backslash E^{(2n-3)}$. Le point y n'appartenant pas à $E^{(2n-3)}$, on a $y \notin \mathrm{Nam}(E_1^{(2n-1)})$. En appliquant à nouveau le lemme 5, on trouve un point $z \in \{(y + E^{(2n-2)\perp}) \cap E_1^{(2n+1)}\}$, différent de y; on a clairement $z \notin E^{(2n-1)}$. Posons $S_{n+1} = \mathrm{conv}(\{z\} \cup S_n)$. La condition $z \notin E^{(2n-1)}$ implique que S_{n+1} est un simplexe de dimension $(n+1)$. Il est clair que S_{n+1} est contenu dans la boule unité de $E^{(2n+1)}$. Notons π la projection de $E^{(2n+1)}$ sur $E^{(2n-1)}$ parallèlement à $E^{(2n-2)\perp}$. Soit $x \in S_{n+1}$, $x = \lambda z + (1-\lambda)x'$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1,\ x' \in S_n)$. On a $\pi(x) = \lambda y + (1-\lambda)x' \in S_n$, d'où $\|\pi(x)\| = 1$. La projection π étant de norme 1, on en déduit $\|x\| \geqq 1$ d'où $\|x\| = 1$. C.Q.F.D.

Le résultat ci-dessus s'appliquant en particulier à E dual non réflexif, on en déduit que si X est un Banach non réflexif, la sphère unité de $E^{(6)}$ contient un triangle, celle de $E^{(8)}$ un tétraèdre, etc.

V. Pré-ordre de différentiabilité

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace d'Asplund, c'est à dire que le dual E' de E a la propriété de Radon–Nikodym. On sait ([6]) qu'alors toutes les normes sur E équivalentes à la norme initiale sont Fréchet-différentiables sur un ensemble dense.

Si N est une norme sur E, appelons "espace tangent" de N, et notons $\tau(N)$ le sous-espace fermé de E engendré par les formes linéaires tangentes aux points de E où N est Fréchet-différentiable. On dira que N_1 est "plus différentiable" que N_2, et on notera $N_1 > N_2$, si $\tau(N_1) \supset \tau(N_2)$. La relation $>$ est un pré-ordre. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes sur E, équivalentes à la norme initiale, et soit $\dot{\mathcal{N}}$ le quotient de $\mathcal{N}$ par la relation d'équivalence "avoir même espace tangent". Le pré-ordre $>$ induit un ordre sur $\dot{\mathcal{N}}$ que nous noterons encore $>$.

La mauvaise différentiabilité des normes duales peut se préciser comme suit.

THÉORÈME 13. *Soit E un espace d'Asplund, N une norme sur E équivalente à la norme initiale. L'espace E, muni de N, est un dual si et seulement si la classe $\dot{N}$ de N est minimale dans l'ensemble ordonné $(\dot{\mathcal{N}}, >)$.*

DÉMONSTRATION. Nous reprenons les notations de lemme 4. Si E est un espace d'Asplund, E a la propriété (P) pour toute norme équivalente à la norme initiale. On a $\tau(E) = \Gamma_E$, et $\tau(E)^\perp = \mathscr{C}_E$. Le théorème 7 s'applique, et E muni de N est un dual si et seulement si $E'' = E \oplus \mathscr{C}_{(E,N)}$, c'est à dire si et seulement si $E'' = E \oplus \tau(E,N)^\perp$.

On a $N_1 < N_2 \Leftrightarrow \tau(E,N_1)^\perp \supseteq \tau(E,N_2)^\perp$. On en déduit que si (E,N) est un dual, alors $\dot{N}$ est minimale dans $\dot{\mathcal{N}}$; en effet $N > N_1 \Rightarrow \tau(E,N_1)^\perp \supseteq \tau(E,N)^\perp$, d'où $\tau(E,N_1)^\perp = \tau(E,N)^\perp$, puisque $E \oplus \tau(E,N)^\perp = E''$ et $\tau(E,N_1)^\perp \cap E = \{0\}$; et donc $\dot{N} = \dot{N}_1$.

Inversément, soit N une norme telle que (E,N) ne soit pas un dual, c'est à dire telle que $E \oplus \tau(E,N)^\perp \neq E''$. Montrons que $\dot{N}$ n'est pas minimale dans $\dot{\mathcal{N}}$.

La projection de $E \oplus \tau(E,N)^\perp$ sur E parallèlement à $\tau(E,N)^\perp$ est continue, et même de norme 1. On en déduit que l'espace $E \oplus \tau(E,N)^\perp$ est fermé.

Soit $v \in E'' \backslash (E \oplus \tau(E,N)^\perp)$. On considère l'espace $X = \tau(E,N)^\perp \oplus D_v$ — où D_v désigne la droite de vecteur directeur v. L'espace $E \oplus X$ est fermé, l'espace X est ω^*-fermé dans E'', et la projection π de $E \oplus X$ sur E parallèlement à X est continue. Soit $\pi_1 = \mathrm{Id} - \pi$ la projection de $E \oplus X$ sur X parallèlement à E; on considère le tonneau C de E'' défini par $C = E''_1 + \|\pi_1\| \, . \, X_1$.

L'espace X étant ω^*-fermé, C est un tonneau ω^*-compact de E''. On a de plus $\pi(C \cap (E \oplus X)) = C \cap E$. Soit N_1 la jauge de $C \cap E$, norme sur E. Posons $C_1 = (C \cap E)''$ l'adhérence de $C \cap E$ dans (E'', ω^*), c'est à dire la boule unité de la norme biduale de N_1. Le tonneau C étant ω^*-compact, on a $C_1 \subseteq C$. On en déduit que

$$\pi(C_1 \cap (E \oplus X)) \subseteq \pi(C \cap (E \oplus X)) = C \cap E = C_1 \cap E.$$

Ce qui signifie que lorsque l'on munit E de la norme N_1, et E'' de la norme biduale de N_1, la projection de $E \oplus X$ sur E parallèlement à X est de norme 1. On a alors $X \subseteq \mathscr{C}_{(E,N_1)}$, et par conséquent $\tau(E,N_1)^\perp \supseteq X \supsetneq \tau(E,N)^\perp$. Les classes $\dot{N}_1$ et $\dot{N}$ sont donc distinctes, et on a $N_1 < N$. C.Q.F.D.

Remarquons que l'ensemble $\dot{\mathcal{N}}$ n'est réduit à un élément que si E est réflexif; de plus, l'ensemble $(\dot{\mathcal{N}}, >)$ n'est jamais réticulé inférieurement si E est isomorphe à un dual non réflexif. Enfin, l'ordre $>$ n'est jamais trivial si E n'est pas réflexif.

VI. Résultats divers. Démonstrations annexes. Questions

Les résultats ci-dessous s'obtiennent assez facilement en utilisant les méthodes développées ci-dessus; nous donnons les énconcés sans démonstration.

(1) Soit E un espace d'Asplund. Il est clair que les topologies ω et ω^* coïncident sur $\mathrm{Nam}(E'_1)$. Mais E est un dual si et seulement si les structures uniformes ω et ω^* coïncident sur $\mathrm{Nam}(E'_1)$.

(2) Soit E Banach. Soit $F \in \mathcal{N}_E$, vérifiant les hypothèses du théorème 8 — par exemple à norme Fréchet-différentiable. Alors F est un prédual de E.

(3) Soit E séparable tel que E'' soit strictement convexe. Alors: E est un dual $\Leftrightarrow$ E est optimal dans E'' (au sens défini dans [1]) $\Leftrightarrow$ l'ombre de E dans E'' est réduite à E.

(4) Soit E Banach ayant la propriété (P). E est isométrique à un sous-espace d'un dual de caractère de densité α si et seulement si le caractère de densité de $E''/\mathscr{C}_E$ est inférieur ou égal à α.

(5) W. J. Davis et W. B. Johnson ([3]) ont construit, sur tout espace non réflexif E, une norme $|||\ \ |||$ telle que $(E, |||\ \ |||)$ ne soit pas un dual.

Les méthodes employées ci-dessus permettent de montrer que $(E, |||\ \ |||)$ n'a en fait pas la propriété ($\square$), donc en particulier qu'il n'est pas rétract de son bidual.

Démonstrations annexes

Si la norme de E'' est lisse en tout point d'un ensemble dense de E, alors $\mathscr{C}_E$ est un espace vectoriel ω^*-fermé.

Considérons une norme $N(.)$ sur $\mathbf{R}^2$, et x un point de lissité de cette norme; soit f_x la forme linéaire tangente en x. Un peu de géométrie élémentaire montre que $u \in \mathbf{R}^2$ vérifie $N(\lambda u - x) \geqq N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ si et seulement si $f_x(u) = 0$. Soit alors E tel que la norme de E'' soit lisse en tout point d'un sous-ensemble dense D de E. Soit $u \in E''$. On a facilement par densité:

$$u \in \mathscr{C}_E \Leftrightarrow \|\lambda u - x\| \geqq \|x\| \qquad \forall x \in D, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Pour tout $x \in D$, soit f_x l'unique forme linéaire de E' telle que $f_x(x) = \|x\|$. D'après ce qui précède, on a $u \in \mathscr{C}_E \Leftrightarrow f_x(u) = 0 \ \forall x \in D$, ce qui montre que $\mathscr{C}_E$ est un sous-espace vectoriel ω^*-fermé de E''.

Si $E^{(4)}$ est strictement convexe, alors E est réflexif.

En effet, soit $x \in E''$, de norme 1, et soit $\mathcal{F}$ la trace sur E du filtre des voisinages de x dans (E''_1, ω^*). Soit $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ l'ensemble des points adhérents à dans $(E_1^{(4)}, \omega^*)$. Il est aisé de voir que $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ est contenu dans la sphère unité de $E^{(4)}$; cet espace étant strictement convexe, on a $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = \{x\}$. Le filtre converge donc, dans $(E_1^{(4)}, \omega^*)$, puisque $(E_1^{(4)}, \omega^*)$ est compact, et donc converge dans (E''_1, ω), ce qui montre que $x \in E$, donc que E est réflexif.

Questions

(1) Soit E un espace ne contenant pas $c_0(\mathbf{N})$. L'espace E est-il unique prédual normique de son dual?

(2) Soit E Banach séparable. A-t-on l'équivalence: $E \not\supset l^1(\mathbf{N}) \Leftrightarrow \mathcal{N}_E$ admet, pour toute norme sur E, un unique élément minimal Γ_E, et on a $X \in \mathcal{N}_E$ si et seulement si $X \supseteq \Gamma_E$.

(3) A-t-on l'équivalence: E est, pour toute norme, isométrique à un sous-espace d'un dual séparable (dépendant à priori de la norme) $\Leftrightarrow$ E'' est séparable?

(4) La propriété "être unique prédual" est-elle héréditaire? Est-elle stable par ε-isométrie?

Bibliographie

1. B. Beauzamy et B. Maurey, *Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach*, J. Functional Analysis **24** (1977), 107–139.

2. J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), 845–886.

3. W. J. Davis and W. J. Johnson, *A renorming of nonreflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973), 386–489.

4. J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces — Selected Topics*, Lecture Notes in Math. **485**, Springer-Verlag, 1975.

5. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, 1977.

6. I. Namioka and R. R. Phelps, *Banach spaces which are Asplund spaces*, Duke Math. J. **42** (1975).

7. H. P. Rosenthal, *Point-wise compact subset of the first Baire class*, Amer. J. Math. **99** (1977), 362–378.

8. V. L. Smulyan, *Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **27** (1940), 643–648.

9. M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques*, Ann. of Math. **110** (1979), 407–438.

Equipe d'Analyse
Universite Paris VI
75230 Paris Cedex 05 France